

Curvas y Superficies Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Curvas y Superficies Examen II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Curvas y Superficies.

Curso Académico 2021/22.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 15 de junio de 2022.

Duración 2 horas y media.

Ejercicio 1. Realice los siguientes apartados:

a) [1 punto] Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por:

$$\alpha(t) = ((1 - 2 \operatorname{sen}(t)) \cos(t), (1 - \operatorname{sen}(t)) \operatorname{sen}(t))$$

Prueba que α es una curva regular y calcula su curvatura. ¿Es $\alpha|_{[0, 2\pi]}$ inyectiva?

b) [1 punto] Sea S una superficie orientable, N una aplicación de Gauss en S y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada por el arco. Consideramos $\hat{T}(s) = \alpha'(s)$, $\hat{N}(s) = N(\alpha(s))$ y $\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$. Se llama torsión geodésica de α a la función

$$\tau_g(s) = \langle \hat{B}'(s), \hat{N}(s) \rangle$$

Demuestra que $\tau_g(s) = 0$ para todo $s \in I$ si y solo si α es una línea de curvatura de S , es decir $\alpha'(s)$ es una dirección principal de S en $\alpha(s)$ para todo $p \in S$.

Ejercicio 2. Sea $S = \{X(u, v) : u \in]0, \pi[, v \in \mathbb{R}\}$ donde

$$X(u, v) = (v \cos(u), v \operatorname{sen}(u), u^2 - 2v + 2)$$

y la curva $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t^2)$, $t \in]0, \pi[$. Se pide:

- [0.5 puntos] Demuestra que X es una parametrización global de S .
- [0.75 puntos] Calcula la primera y segunda formas fundamentales de S .
- [0.75 puntos] Calcula la curvatura de Gauss y la curvatura media de S .
- [0.75 puntos] Prueba que el punto $p = (0, 0, 3) \in S$ y determinar el plano tangente de la superficie en ese punto. Calcula las curvaturas principales y las direcciones asintóticas en p , si las hubiera.
- [0.75 puntos] Comprueba que α es una curva asintótica de S .
- [0.5 puntos] Comprueba que $K(\alpha(t)) = -\tau_\alpha(t)^2$, donde $K(\alpha(t))$ denota la curvatura de Gauss de la superficie en el punto $\alpha(t)$ y $\tau_\alpha(t)$ es la torsión de la curva α en t .

Ejercicio 3. Sea $X : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S tal que

$$E(u, v) = G(u, v) = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad F(u, v) = 0$$

- [1 punto] Calcula los símbolos de Christoffel de S en esta parametrización.
- [1 punto] Calcula la curvatura de Gauss de S . ¿Existe una isometría local de S en un plano?

Ejercicio 4. Estudia de forma razonada las siguientes cuestiones:

- [1 punto] Sea S una superficie y $p \in S$. Supongamos que cada entorno abierto de p en S contiene puntos a ambos lados del plano afín tangente a S en p . ¿Podemos afirmar que p es un punto hiperbólico?
- [1 punto] Una superficie S se dice que es homogénea si para cada par de puntos p_1 y p_2 de S existe una isometría $\Phi : S \rightarrow S$ tal que $\Phi(p_1) = p_2$. Prueba que toda superficie compacta, conexa y homogénea es una esfera.